第10講　総合問題(2)

1　$f(x)=\sum_{k=1}^{10} k|x-k|$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　$x<1$ のとき，$f'(x)$ の値を求めよ．

(2)　$x>10$ のとき，$f'(x)$ の値を求めよ．

(3)　$1 \leqq n \leqq 9$ を満たす整数 n に対し，$n<x<n+1$ における $f'(x)$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

< Note >

2　平面上において，点Oを始点とする2つの半直線を l_1，l_2 とし，それらのなす角は鋭角 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とする．点Aは l_1 上の点で $\mathrm{OA}=1$，点Bは l_2 上の点で $\mathrm{OB}=b$ とする．次に，直線AB上に点Oからおろした垂線と直線ABの交点をPとする．

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によりベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とするとき，t を b と θ を用いて表せ.

(2)　θ を固定し，b を $b>0$ の範囲で動かすとき，点Pが l_1，l_2 ではさまれる部分（ただし l_1，l_2 も含む）にあるための b の範囲を求めよ．

(3)　b が(2)で求めた範囲で動くとき，点Pの描く軌跡と l_1，l_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

3　不等式$\{\log_4(x^2+y^2)-\log_8(x^3-y^3)\}\{\log_2 y-\log_4(x^2-2y+y^2)\}>0$を満たす点$(x,\ y)$の存在する範囲を図示せよ．また，その面積を求めよ．

【Point Pickup】

＜ Note ＞

第 10 講　総合問題(2)

$\boxed{1}$ $f(x)=\sum_{k=1}^{10}k|x-k|$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $x<1$ のとき，$f'(x)$ の値を求めよ．

(2) $x>10$ のとき，$f'(x)$ の値を求めよ．

(3) $1\leqq n\leqq 9$ を満たす整数 n に対し，$n<x<n+1$ における $f'(x)$ の値を求めよ．

$$f(x)=\sum_{k=1}^{10}k|x-k|=1\cdot|x-1|+2\cdot|x-2|+3\cdot|x-3|+\cdots\cdots+10\cdot|x-10|$$

(1) $x<1$ のとき　$x-k<0$　よって　$f(x)=\sum_{k=1}^{10}k(-x+k)$

ゆえに　$f'(x)=\sum_{k=1}^{10}(-kx+k^2)'=\sum_{k=1}^{10}(-k)=-\dfrac{10\cdot 11}{2}=\mathbf{-55}$

(2) $x>10$ のとき　$x-k>0$　よって　$f(x)=\sum_{k=1}^{10}k(x-k)$

ゆえに　$f'(x)=\sum_{k=1}^{10}(kx-k^2)'=\mathbf{55}$

(3) $1\leqq n\leqq 9$ のとき　$f(x)=\sum_{k=1}^{n}k(x-k)+\sum_{k=n+1}^{10}k(-x+k)$

ゆえに　$f'(x)=\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=n+1}^{10}k$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)-\frac{(-n+10)(n+1+10)}{2}=\frac{1}{2}(n^2+n+n^2+n-110)$$

$$=\boldsymbol{n^2+n-55}$$

$\boxed{2}$ 平面上において，点 O を始点とする 2 つの半直線を l_1，l_2 とし，それらのなす角は鋭角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする．点 A は l_1 上の点で OA $=1$，点 B は l_2 上の点で OB $=b$ とする．次に，直線 AB 上に点 O からおろした垂線と直線 AB の交点を P とする．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ によりベクトル $\overrightarrow{OP}$ を

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$

とするとき，t を b と θ を用いて表せ．

(2) θ を固定し，b を $b>0$ の範囲で動かすとき，点 P が l_1，l_2 ではさまれる部分（ただし l_1，l_2 も含む）にあるための b の範囲を求めよ．

(3) b が(2)で求めた範囲で動くとき，点 P の描く軌跡と l_1，l_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) $|\overrightarrow{OA}|=1$, $|\overrightarrow{OB}|=b$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=b\cos\theta$

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=b^2-2b\cos\theta+1>0$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より　$\{t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}\}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　　$(\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BA})\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}-t|\overrightarrow{AB}|^2=0$　　ゆえに　$t=\dfrac{\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})}{|\overrightarrow{AB}|^2}=\boldsymbol{\dfrac{b^2-b\cos\theta}{b^2-2b\cos\theta+1}}$

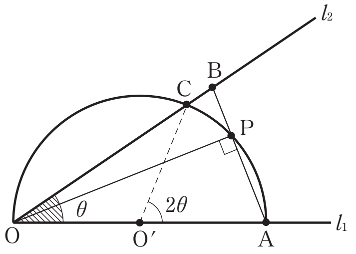
(2)　条件より $0\leqq t\leqq 1$

よって　$0\leqq\dfrac{b^2-b\cos\theta}{b^2-2b\cos\theta+1}\leqq 1$　　$b^2-2b\cos\theta+1>0$ より $\begin{cases}b(b-\cos\theta)\geqq 0\cdots\cdots① \\ b\cos\theta\leqq 1\quad\cdots\cdots②\end{cases}$

①において $b>0$ より　$b\geqq\cos\theta$　　②において　$0<\cos\theta<1$ より　$b\leqq\dfrac{1}{\cos\theta}$

ゆえに　$\boldsymbol{\cos\theta\leqq b\leqq\dfrac{1}{\cos\theta}}$

(3)　点 P は $\angle OPA=90^\circ$ を満たしながら動く．
よって，P は線分 OA を直径とする円周上にあり，
(2)より右図弧 AC の全体を動く．
$\angle CO'A=2\theta$ より求める面積は，扇形AO′C＋△OO′C



よって　$\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot 2\theta+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sin(\pi-2\theta)=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}\theta+\dfrac{1}{8}\sin 2\theta}$

3　不等式 $\{\log_4(x^2+y^2)-\log_8(x^3-y^3)\}\{\log_2 y-\log_4(x^2-2y+y^2)\}>0$ を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ．また，その面積を求めよ．

$\log_4(x^2+y^2)-\log_8(x^3-y^3)$　……(i)　　$\log_2 y-\log_4(x^2-2y+y^2)$　……(ii)

真数条件より

$x^2+y^2>0$　よって　$(x,\ y)\neq(0,\ 0)$

$x^3-y^3>0$　$x,\ y$ は実数より　$x>y$

$y>0$

$x^2-2y+y^2>0$　よって　$x^2+(y-1)^2>1$

ゆえに　$x>y>0$　かつ　$x^2+(y-1)^2>1$　……①

このとき　(i)$=\dfrac{1}{2}\log_2(x^2+y^2)-\dfrac{1}{3}\log_2(x^3-y^3)=\dfrac{1}{6}\{\log_2(x^2+y^2)^3-\log_2(x^3-y^3)^2\}$

ここで

$(x^2+y^2)^3-(x^3-y^3)^2=x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6-(x^6-2x^3y^3+y^6)$

$=x^2y^2(3x^2+2xy+3y^2)>0$

よって　$(x^2+y^2)^3>(x^3-y^3)^2$　　ゆえに　$\log_2(x^2+y^2)^3>\log_2(x^3-y^3)^2$

つまり　(i)>0 である．

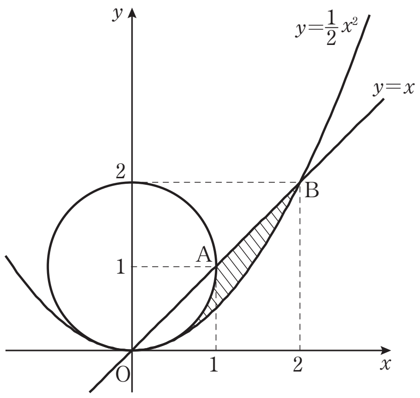
したがって　(ii)>0 を満たす $(x,\ y)$ を求める．

$$\log_2 y-\frac{1}{2}\log_2(x^2-2y+y^2)>0 \qquad \log_2 y^2>\log_2(x^2-2y+y^2) \qquad y^2>x^2-2y+y^2$$

ゆえに　$y>\dfrac{1}{2}x^2$　……②

①，②より求める $(x,\ y)$ の存在範囲は右図斜線部

（境界含まない）



求める面積は

（弓形 OB）－（弓形 OA）

$$=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx-\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot1^2\right)$$

$$=\frac{1}{12}\cdot2^3-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{7}{6}-\frac{\pi}{4}}$$

第10講　総合問題(2)　練習問題

1　実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す．

$a_m=[\sqrt{m}]\,(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ に対して，数列 b_1，b_2，b_3，…… を，$b_1=0$，$k \geqq 2$ のとき $a_m<k \leqq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k=m$ と定める．次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2} a_m+\sum_{k=1}^{n} b_k=n^3$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{m-1}^{n^2}[\sqrt{m}]$ を求めよ．

2 座標平面上に直線 l：$x\sin\theta+y\cos\theta=1$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$がある.

不等式　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x\sin\theta+y\cos\theta\geqq 1$が表す領域を D,

不等式　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x\sin\theta+y\cos\theta\leqq 1$ が表す領域をD'とする.

D 内に半径 R の 2 つの円C_1，C_2を，C_1は l と y 軸に接し，C_2は l と x 軸に接し，さらにC_1とC_2が外接するようにとる．またD'内に半径 r の 2 つの円C_1'，C_2'を，C_1'は l と y 軸に接し，C_2'は l と x 軸に接し，さらにC_1'とC_2'が外接するようにとる.

(1) $\dfrac{r}{R}$ を θ で表せ.

(2) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ.

第10講　総合問題(2)　　練習問題　解答

1　実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す．
$a_m=[\sqrt{m}]\ (m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ に対して，数列 b_1，b_2，b_3，…… を，$b_1=0$，$k\geqq 2$ のとき $a_m<k\leqq a_{m+1}$ となる m に対して $b_k=m$ と定める．次の問いに答えよ．

(1)　数列 $\{b_k\}$ の一般項を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}a_m+\sum_{k=1}^{n}b_k=n^3$ が成り立つことを示せ．

(3)　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}]$ を求めよ．

解答例

(1)　$b_k=m$ となる m は　$a_m<k\leqq a_{m+1}$

つまり　$[\sqrt{m}]<k\leqq[\sqrt{m+1}]$ を満たす m によって定まる．

k は整数より　$\sqrt{m}<k\leqq\sqrt{m+1}$

ゆえに　$m<k^2\leqq m+1$

つまり　$m+1\leqq k^2\leqq m+1$　より　$k^2=m+1$　よって　$m=k^2-1$

これは $k\geqq 2$ のときだけでなく $k=1$ のときも成り立つ．　したがって　$\boldsymbol{b_k=k^2-1}$

ガウスは「整数部分だけ」を取り出すもの．ガウスを取り除いても考える範囲（「整数」）に影響はない．左辺に等号がついているときは注意

(2)　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}a_m+\sum_{k=1}^{n}b_k=n^3$　……(※)

[1]　$n=1$ のとき　(※)の(左辺)$=a_1+b_1=[\sqrt{1}]+0=1=1^3=$(右辺)より(※)は成り立つ．

[2]　$n=i$ のとき　(※)つまり　$\displaystyle\sum_{m=1}^{i^2}a_m+\sum_{k=1}^{i}b_k=i^3$　が成り立つと仮定する．このとき

$$\sum_{m=1}^{(i+1)^2}a_m+\sum_{k=1}^{i+1}b_k=\sum_{m=1}^{i^2}a_m+\sum_{m=i^2+1}^{(i+1)^2}a_m+\sum_{k=1}^{i}b_k+b_{i+1}=i^3+(a_{i^2+1}+a_{i^2+2}+\cdots\cdots+a_{(i+1)^2})+b_{i+1}$$
$$=i^3+[\sqrt{i^2+1}]+[\sqrt{i^2+2}]+\cdots\cdots+[\sqrt{(i+1)^2}]+(i+1)^2-1$$

ここで自然数 $j\ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2i)$ について

$i=\sqrt{i^2}<\sqrt{i^2+j}<\sqrt{i^2+2i+1}=i+1$ より　$i<\sqrt{i^2+j}<i+1$　であるから

$$[\sqrt{i^2+j}]=i$$

よって　$\displaystyle\sum_{m=1}^{(i+1)^2}a_m+\sum_{k=1}^{i+1}b_k=i^3+i\times 2i+(i+1)+\{(i+1)^2-1\}=(i+1)^3$

したがって　$n=i+1$のときも(※)が成り立つ．

[1][2] より，すべての自然数 n で(※)が成り立つ．

(3)　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}]=\sum_{m=1}^{n^2}a_m=n^3-\sum_{k=1}^{n}b_k=n^3-\sum_{k=1}^{n}(k^2-1)=n^3-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+n$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{6}n(4n^2-3n+5)}$

2 座標平面上に直線 $l: x\sin\theta+y\cos\theta=1\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がある．

不等式　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x\sin\theta+y\cos\theta\geqq 1$ が表す領域を D，

不等式　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x\sin\theta+y\cos\theta\leqq 1$ が表す領域を D' とする．

D 内に半径 R の2つの円 C_1，C_2 を，C_1 は l と y 軸に接し，C_2 は l と x 軸に接し，さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる．また D' 内に半径 r の2つの円 C_1'，C_2' を，C_1' は l と y 軸に接し，C_2' は l と x 軸に接し，さらに C_1' と C_2' が外接するようにとる．

(1) $\dfrac{r}{R}$ を θ で表せ．　(2) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$\dfrac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

解答例

(1) l の傾きは $-\tan\theta=\tan(\pi-\theta)$ であることから，x 軸の負方向と l のなす角が θ である．

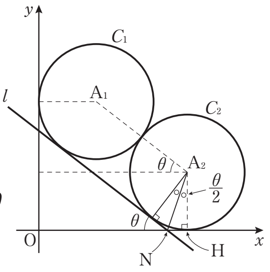
また，直線 l の x 切片を N とする．

まず，R について考える．2円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ A_1，A_2 とし，

A_2 から x 軸に下ろした垂線の足を H とする．

グラフより A_1，A_2 の x 座標はそれぞれ R，$R+2R\cos\theta$ である．

また，$\angle NA_2H=\dfrac{\theta}{2}$ であることから



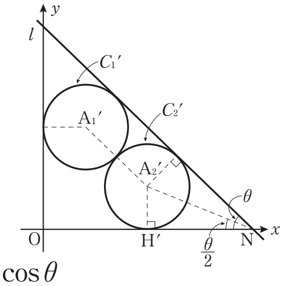
ON＋NH＝（A_2の x 座標）より　$\dfrac{1}{\sin\theta}+R\tan\dfrac{\theta}{2}=R+2R\cos\theta$

$$1+R\sin\theta\cdot\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=R\sin\theta+2R\sin\theta\cos\theta$$

ゆえに　$R=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}$

同様に r について考える．2円 C_1'，C_2' の中心をそれぞれ，

A_1'，A_2' とし，A_2' から x 軸に下ろした垂線の足を H′ とする．



ON−NH′＝（A_2'の x 座標）より　$\dfrac{1}{\sin\theta}-\dfrac{r}{\tan\dfrac{\theta}{2}}=r+2r\cos\theta$

ゆえに　$r=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta+1}$

したがって　$\boldsymbol{\dfrac{r}{R}=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta+\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta+1}}$

(2) $\sin\theta+\cos\theta=t$ とおくと　$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$　　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より　$1<t\leqq\sqrt{2}$

$$\frac{r}{R}=\frac{t^2+t-2}{t^2+t}=1-\frac{2}{t^2+t}\qquad 1<t\leqq\sqrt{2}\ \text{より}\quad 2<t^2+t\leqq 2+\sqrt{2}$$

よって，$\dfrac{r}{R}$ のとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{0<\dfrac{r}{R}\leqq\sqrt{2}-1}$